ESQUEMAS DE ARGUMENTACIÓN: LA DEMOSTRACIÓN VISTA POR QUIEN LA PRODUCE

Mario Dalcín – Mónica Olave
mdalcin00@gmail.com – monicaolave23@ gmail.com
Instituto de Profesores 'Artigas', Uruguay

Tema: Formación de profesores y maestros
Modalidad: Taller
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: Demostración, esquema de argumentación

Resumen

En este taller pretendemos, a partir de la realización de actividades que involucran la formulación de conjeturas, la elaboración de argumentos que las fundamenten o refuten y el análisis de las pruebas elaboradas en el taller así como pruebas elaboradas por terceros, generar un ámbito de discusión y análisis acerca de lo que constituye el autoconvencimiento y la persuasión para cada persona. Esta aproximación busca aportar elementos a tener en cuenta para un abordaje productivo de la demostración en la clase de matemática.

Introducción

En el ámbito de la matemática la forma de establecer la validez de una proposición es mediante una demostración, entendida esta como una sucesión de enunciados cada uno de los cuales es, o bien una definición, axioma o teorema, o bien es derivado deductivamente de enunciados previos (Balacheff, 1998). Esto implica que la demostración es una herramienta central en la construcción de la matemática y motiva la presencia de la demostración como tópico en la enseñanza de esta asignatura tanto a nivel de la enseñanza media como a nivel terciario, en particular en la formación inicial de un docente de matemática de enseñanza media.

Varios estudios realizados en el ámbito de la Matemática Educativa sugieren, por una parte, que se deben buscar metodologías alternativas para la enseñanza y aprendizaje de la demostración teniendo en cuenta el fracaso en la enseñanza de la misma. (Hadas, Hershkowitz y Schwarz, 2000). Por otro lado, estudios actuales sobre este tópico nos alertan que a la hora de enseñar y aprender la demostración se deben tener en cuenta las ideas de los estudiantes (Hanna y de Villiers, 2012) y, por qué no, las ideas de los profesores que son quienes en definitiva presentan en sus clases a la demostración como potente herramienta de prueba.

Es por esto que este taller, dirigido a estudiantes de profesorado de matemática y a profesores de la asignatura, se propone indagar las producciones de los participantes en torno a actividades matemáticas donde estos se vean en la necesidad de fundamentar, es decir de poner en juego sus propios argumentos frente a las actividades propuestas y qué argumentos consideran válidos a la hora de analizar producciones realizadas por estudiantes. De esta manera se pondrá sobre la mesa las creencias de los estudiantes y de los docentes, compararlas y discutir sobre la pertinencia o no de diferentes metodologías que permitan un mejoramiento en la enseñanza y aprendizaje de este tópico.

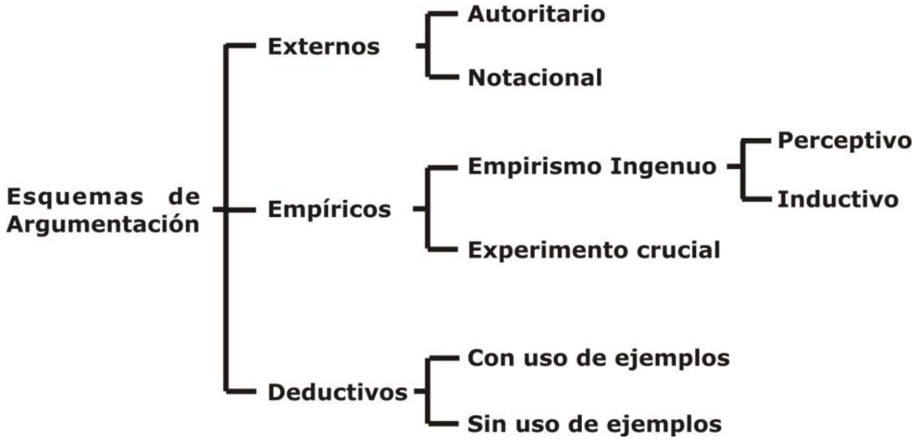
Consideraciones teóricas

Para el análisis de las actividades realizadas por los participantes del taller y que se hará en forma conjunta, utilizaremos el concepto de *esquema de argumentación de una persona* elaborado por Sowder y Harel (1996, 1998), el concepto de *prueba* introducido por Balacheff (1998, 2000) y la clasificación de esquemas de argumentación que surge de Olave y Dalcín (2015).

Sowder y Harel (1996, 1998) proponen una estructura con la cual pensar sobre las justificaciones de los estudiantes. Introducen el concepto de *esquema de argumentación de una persona* como “lo que constituye el autoconvencimiento y la persuasión para esa persona”. La demostración es el instrumento matemático usado para validar una afirmación y el esquema de argumentación de una persona refiere a la forma que toma el pensamiento de esa persona a la hora de fundamentar una afirmación matemática. Las distintas categorías de esquemas de argumentación que identifican estos autores representan un estadio cognitivo, una habilidad intelectual en el desarrollo matemático de los estudiantes, y son derivadas de las acciones realizadas por los estudiantes en procesos de validación de proposiciones matemáticas. Los esquemas de argumentación son una interpretación sobre estructuras cognitivas de pensamiento desarrolladas por las personas en la dirección de elaborar una demostración. La demostración de una proposición matemática puede pensarse como una serie de pasos lógicos; sin embargo si pensamos en una persona intentando elaborar una demostración tomamos conciencia que intervienen otros factores más allá de los estrictamente lógicos: averiguar, indagar, convencerse a sí mismo y persuadir.

Balacheff (1998, 2000) introduce la noción de *prueba* diferenciándola de la noción de demostración. Concibe a la prueba como una explicación cuyo fin es establecer la veracidad de un enunciado y que es reconocida y aceptada por un colectivo. Ésta puede evolucionar o cambiar con el tiempo y puede ser aceptada por un colectivo y no por otro. Utiliza el término *demostración* para hacer referencia a una prueba con una forma particular: una sucesión de enunciados cada uno de los cuales es, o bien una definición, axioma o teorema, o bien es derivado deductivamente de los enunciados mencionados. Balacheff propone estudiar la demostración desde el punto de vista de las prácticas matemáticas de los estudiantes en el salón de clase centrando la atención "en cómo llegan los estudiantes a la convicción de la validez de la solución propuesta." A partir de un estudio empírico Balacheff propone una teoría sobre qué deberíamos considerar válido en la clase de matemática, qué pruebas considerar válidas aunque no sean deductivas.

En la investigación que realizamos en el marco del año sabático (Olave y Dalcín, 2015), teniendo en cuenta los constructos teóricos antes mencionados y lo que produjeron estudiantes que ingresan al profesorado de matemática a la hora de involucrarse en tareas referidas a números y geometría (ver Anexo) que implican acciones de conjeturar, argumentar y validar proponemos una clasificación de los esquemas de argumentación basada en tres categorías básicas –externos, empíricos y deductivos- y sus respectivas subcategorías. Estas se pueden observar en el siguiente esquema:



La descripción de cada categoría y subcategoría está basada en muchos aspectos de los referentes teóricos descritos pero adaptados a lo que convence a los estudiantes considerados en nuestro estudio como a lo que ellos pueden ofrecer para persuadir a otros.

Esquemas de Argumentación Externos

En los esquemas de argumentación externos, tanto lo que convence al estudiante como lo que el estudiante puede ofrecer para persuadir a otros tiene una procedencia exterior siendo esta fuente externa el único camino que tienen para justificar un resultado. Esta clase de esquema puede ser causado por el tipo de enseñanza que privilegia los productos acabados y no los procesos que llevan a ese producto. En estos casos es el docente el que tiene un conocimiento para enseñar y presenta a sus estudiantes un conocimiento acabado, el que figura en los libros y el estudiante solo tiene que aprender a reproducirlo de tal forma que se parezca lo más posible a lo que sus docentes les proponen.

Autoritario.

En los esquemas de argumentación externos autoritarios los estudiantes confían en lo que dicen los libros, el profesor, un compañero más avanzado o en su memoria. Este esquema lo podemos reconocer en estudiantes que piden se les diga cómo se hace la actividad que tienen que resolver y no se dan la oportunidad de involucrarse en la tarea. Conciben a la matemática como un conjunto de verdades y muestran poco interés por el origen de esas verdades, parecen no ver la diferencia entre intentar probarlo ellos o que les digan cómo hacerlo. Ante una actividad tratan de buscar en sus apuntes si hay una similar y no se ven a sí mismos como posibles productores de argumentos. Pueden reclamar porque “el método visto en clase no funcionó” o pedir ayuda antes de intentar abordar una actividad. Otros estudiantes pueden intentar involucrarse en una actividad mientras esta no sea declarada teorema por el profesor. Una vez etiquetado como tal, los estudiantes lo ven como una fórmula, algo a lo que hay que obedecer. Otra forma en que se manifiesta este esquema es cuando los estudiantes reformulan con otras palabras lo que hay que demostrar pero sin ir más allá.

Notacional

Los estudiantes confían en la forma de la argumentación más que en la exactitud de la misma y llegan a aceptar pruebas falsas por su apariencia, por su forma. Por ejemplo, estudiantes que preguntan si algo es una prueba o no y dicen "me convence pero tengo dudas de si lo es porque no se parece a una prueba."

Dentro de este esquema también consideraremos las validaciones que se sustentan en la forma simbólica de los argumentos. Los estudiantes consideran a los símbolos con "vida propia", carentes de significado o sin relación con el problema. Usan símbolos sin entender bien su significado. Su principal preocupación es dar una respuesta aunque no entiendan bien de qué se trata. También se puede reconocer este esquema ante situaciones donde los estudiantes apenas leen la letra de la propuesta y empiezan a manipular la expresión simbólica involucrada en el problema sin saber hacia dónde van. También se puede observar en estudiantes que pueden argumentar correctamente la validez de una prueba pero no la consideran tal porque su explicación "no incluye ninguna expresión simbólica", lo que les hace dudar de si es prueba o no. En argumentaciones orales correctas dicen "no sé cómo escribirlo".

Esquemas de Argumentación Empíricos

Este esquema está caracterizado por el uso de ejemplos como el principal elemento de convicción. Los estudiantes conjeturan después de haber observado regularidades en uno o más ejemplos. Utilizan los ejemplos o relaciones observadas en ellos, para justificar la verdad de su conjetura. Cuando la conjetura está incluida en el enunciado de un problema los estudiantes sólo tienen que construir ejemplos para comprobar la conjetura y justificarla. Dentro de las argumentaciones empíricas distinguimos dos clases dependiendo de la forma en que los estudiantes seleccionan los ejemplos: empirismo ingenuo y experimento crucial.

Empirismo Ingenuo

La conjetura se justifica mostrando que es verdadera en uno o varios ejemplos que, por lo general, son elegidos sin un criterio específico. La comprobación puede implicar solamente la percepción visual o medición con instrumentos de ejemplos (*perceptual*) o también puede implicar el uso de elementos matemáticos o relaciones encontradas en el o los ejemplos (*inductivo*).

Experimento Crucial

Dentro de este esquema encontramos aquellas conclusiones que surgen a partir de un caso que el estudiante reconoce tan poco particular como le es posible. La conjetura se justifica al mostrar que es cierta en un ejemplo especialmente elegido por ser un caso extremo. Los estudiantes son concientes de la necesidad de generalización por lo que optan por un ejemplo lo más excéntrico como sea posible aunque no lo consideran como representante de ningún otro caso. Asumen que la conjetura siempre es cierta si se cumple en este ejemplo, la justificación se compone de verificación experimental de la conjetura en el ejemplo seleccionado.

Esquemas de Argumentación Deductivos

Están caracterizados por la descontextualización de los argumentos utilizados. Se basan en aspectos genéricos del problema, operaciones mentales y razonamientos deductivos, todos con el objetivo de validar la conjetura de una manera general.

En caso de utilizar ejemplos, estos sirven de ayuda para organizar los argumentos pero las características particulares del ejemplo no se consideran en la justificación. Dentro de los esquemas de argumentación deductivos, basándonos en si hay selección de ejemplos o no, distinguimos dos subcategorías: deductivos con uso de ejemplos y deductivos sin uso de ejemplos.

Deductivos con uso de ejemplos

Este esquema se presenta cuando se utiliza un ejemplo específico para ayudar a organizar la justificación. Por ejemplo, es el caso en que las justificaciones se basan en operaciones mentales que producen una transformación del problema inicial en otro equivalente. El papel de los ejemplos es ayudar a prever qué transformaciones son convenientes. Las transformaciones pueden basarse en las imágenes mentales espaciales, las manipulaciones simbólicas o la construcción de objetos. Las justificaciones son secuencias de razonamientos deductivos derivadas de los datos del problema y axiomas, definiciones o teoremas aceptados. El papel de los ejemplos es para ayudar a organizar los pasos de dichas deducciones. También consideramos dentro de este esquema a aquellos razonamientos donde la justificación se basa en un ejemplo específico visto como un representante característico de su clase, y la justificación incluye hacer explícitas razones abstractas para validar una conjetura por medio de operaciones o transformaciones en el ejemplo. La justificación refiere a propiedades abstractas y elementos o propiedades de la clase representada por el ejemplo. Este tipo de esquema lo podemos ver en el trabajo de Al-Warizmi donde para fundamentar la resolución de un tipo de ecuaciones de segundo grado recurre a una ecuación particular y hace las transformaciones sobre ella pero sobreentendiendo que es aplicable a toda la familia.

Deductivos sin uso de ejemplos

Es cuando la justificación se basa en operaciones mentales sin la ayuda de ejemplos específicos, sólo se mencionan los aspectos genéricos del problema en cuestión. La explicación de las razones que fundamentan la validez de la proposición se basa en un análisis de las propiedades de los objetos en juego. Estas propiedades no pueden ser testificadas por medio de sus representantes sino que deben ser formuladas en su generalidad. Las acciones son internalizadas y separadas de los ejemplos específicos considerados.

Actividades

En el taller se trabajarán dos tipos de actividades. En una primera instancia se propondrán actividades frente a las cuales los participantes se verán en la necesidad de elaborar argumentos para autoconvencerse y convencer a otros (Anexo 1). En una segunda instancia se les propondrá a los participantes que analicen pruebas elaboradas por otros y que expliciten cuál o cuáles de dichas pruebas los convencen y cuales no (Anexo 2). Las producciones de los participantes frente a los dos tipos de actividades se analizarán en base al marco teórico anteriormente explicitado.

Referencias bibliográficas

- Balacheff, N. (1998). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. En D. Pimm (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children*, pp. 216-235. London, U. K.: Hodder & Stoughton.
- Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá, Colombia: Una empresa docente.
- Hanna, G. y de Villiers, M. (Eds.) (2012). *proof and proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study*. Dordrecht: ICMI y Springer.
- Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: results from exploratory studies. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 7, 234-283.
- Hadas, N. ; Hershkowitz, R. y Schwarz, B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, 44, pp. 127-150.
- Olave, M. y Dalcín, M. (2015). *Un estudio de los esquemas de argumentación en estudiantes de primer año de profesorado de matemática*. Investigación desarrollada en el marco del Art. 75.3 del Estatuto del Funcionario Docente (Año Sabático) y aprobado por el CFE en el Acta nº 9, Res. Nº 42, Exp. 5/14626/14. Inédito.
- Sowder, L. y Harel, G. (1998). Types of Students' Justifications. *The Mathematics Teacher*, Vol. 91, nº 8, noviembre, pp. 670-675

Anexo 1: ¿Qué argumentos podemos elaborar para convencer?

- AB es diámetro de una circunferencia. P es un punto de la circunferencia distinto de A y de B. ¿Puedes decir algo sobre el ángulo APB? Explica por qué.

- A, P y B son puntos de una circunferencia de modo que el ángulo APB es recto. ¿AB es diámetro de la circunferencia? Explica por qué.

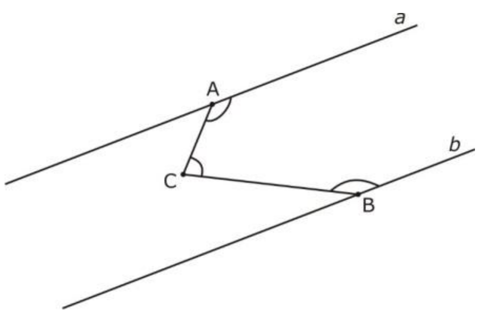
- ABCDE es un pentágono regular. ¿Miden lo mismo los ángulos ACB y ADB?

- Si n^2 es un número natural par, entonces, ¿n es par? ¿Cómo le explicarías a un compañero que lo que afirmas es cierto?

- ¿Se puede afirmar que "$7n^2 + 3n + 4$ es par" para todo *n* natural? Fundamenta tu respuesta.

- Las rectas *a* y *b* son paralelas. El punto A varía en la recta *a*, el punto B varía en la recta *b* y el punto C varía en la franja comprendida entre las rectas *a* y *b*.

¿Es constante la suma de los ángulos marcados en la figura al variar los puntos A, B y C?



- $4^2 - 3^2 =$ ____

  $5^2 - 4^2 =$ ____

¿Puedes establecer una relación entre cada resultado y las bases de las potencias respectivas? ¿Es una coincidencia?

• ¿Existe un cuadrilátero con dos pares de lados consecutivos iguales y con todos sus ángulos distintos? ¿Por qué?

Anexo 2: ¿Qué argumentos nos convencen?

A un grupo de estudiantes se les pidió que fundamentaran sobre el valor de verdad de dos proposiciones. Para cada una de ellas te presentamos algunas pruebas elaboradas por dichos estudiantes.

Te proponemos que las analices y nos digas:

a) cuál o cuáles de ellas te convencen

b) cuál o cuáles de ellas no te convencen

Explica, en cada caso, por qué realizaste la correspondiente elección.

Proposición 1

La suma de dos números naturales impares es un número par.

Prueba 1

a y b son impares $\Rightarrow$ $a= 2n+1$ y $b= 2n+1$ con $n \in$ N

$a+b=2n+1+2n+1=4n+2 \underset{distributiva}{=} 2(2n+1) \Rightarrow a+b$ es par

Prueba 2

$$\left.\begin{array}{l}3+5=8\\7+11=18\\41+23=64\end{array}\right\} \Rightarrow \text{la suma de dos números impares es siempre par} \;.$$

Prueba 3

15+9 = 14+1 + 8+1 = 14+8+2 = 24

A todo número impar lo podemos escribir como un par más uno. Así tendremos la suma de dos números pares más dos veces uno y el resultado es siempre par.

Prueba 4

Todos los números impares terminan en 1, 3, 5, 7 o 9. Al sumar dos impares, cualquier combinación entre sus últimas cifras dará par. Entonces tendremos como resultado un número que termina en cifra par. Por lo tanto el número resultante es par.

Prueba 5

a y *b* son impares

$$a + b = x \Rightarrow \begin{cases} a = x - b \\ b = x - a \end{cases}$$

$$a+b = x-b + x-a = 2x-a-b = 2x - (a+b)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x - (a+b) \text{ es par} \\ 2x \text{ es par} \end{array}\right\} \Rightarrow a + b \text{ es par}$$